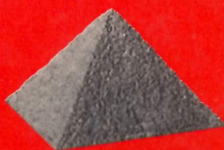


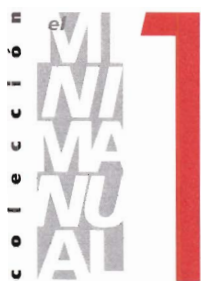
MateCard

TODAS LAS FÓRMULAS MATEMÁTICAS

el MI NI MA NU AL

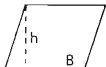
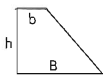
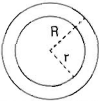
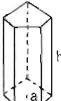
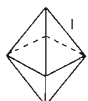
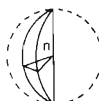
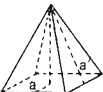


1



MateCard

Áreas y volúmenes

	Cuadrado $A = l^2$	Triángulo $A = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h$	
	Rectángulo $A = B \cdot h$	Romboide $A = B \cdot h$	
	Rombo $A = \frac{1}{2} D \cdot d$	Trapecio $A = \frac{B + b}{2} \cdot h$	
	Polígono regular $A = \frac{P \cdot a}{2}$	Círculo $A = \pi R^2$ $L = 2\pi R$	
	Corona circular $A = \pi (R^2 - r^2)$	Sector circular $A = \frac{\pi R^2}{360} n$	
	Cubo $A = 6 l^2$ $V = l^3$	Cilindro $A = 2\pi R (h + R)$ $V = \pi R^2 \cdot h$	
	Ortoedro $A = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$	Cono $A = \pi R \cdot (g + R)$ $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$	
	Prisma recto $A = P(h + a)$ $V = A_b \cdot h$	Tronco de cono $A = \pi [g(R + r) + R^2 + r^2]$ $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$	
	Tetraedro regular $A = l^2 \sqrt{3}$ $V = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$	Esfera $A = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	
	Octaedro regular $A = 2 l^2 \sqrt{3}$ $V = \frac{l^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$	Huso - Cuña esférica $A = \frac{4\pi R^2}{360} \cdot n$ $V = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi R^3}{360} \cdot n$	
	Pirámide recta $A = \frac{1}{2} P \cdot (a + a')$ $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$	Casquete esférico $A = 2\pi R \cdot h$ $V = \frac{1}{3} \pi h^2 \cdot (3R - h)$	
	Tronco de pirámide $A = \frac{1}{2} (P + P') \cdot a + A_b + A_{b'}$ $V = \frac{1}{3} h (A_b + A_{b'} + \sqrt{A_b A_{b'}})$	Zona esférica $A = 2\pi R \cdot h$ $V = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2 + 3r'^2)$	

A_b = área base

a = apotema

h = altura

g = generatriz

P = perímetro

Conjuntos de números

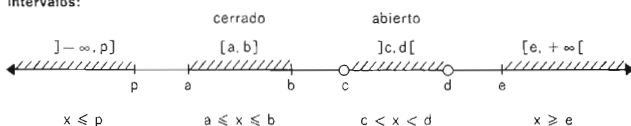
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (naturales, enteros, racionales, reales, complejos)

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Mínimo común múltiplo (m. c. m.) = producto de factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Máximo común divisor (m. c. d.) = producto de factores comunes con el menor exponente.

Intervalos:



Valor absoluto: $|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$

Fracciones generatrices:

Todo decimal periódico es un número racional y su valor, según los casos, es:

limitado	periódico puro	periódico mixto
$a'bc = \frac{abc}{100}$	$a'\overline{bc} = \frac{abc - a}{99}$	$a'b\overline{c}d = \frac{abcd - ab}{990}$

Potencias / raíces

Potencias de exponente natural: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$

entero: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

fraccionario: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Propiedades:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n / a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a/b)^n = a^n / b^n$
- $a^0 = 1$

Raíz enésima: $\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$; n índice; a radicando

si n impar $\rightarrow r$ es única

si n par $\rightarrow$ para $a > 0$, existen dos raíces ($\pm r$)
para $a < 0$, no tiene

Propiedades:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$
- $(\sqrt[n]{a})^r = \sqrt[n]{a^r}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[n]{a^p}$
- $a^p = \sqrt[n]{a^{n \cdot p}}$

Racionalización:

- $\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{b}$
- $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$

Ecuación de 2º grado

Definición: $ax^2 + bx + c = 0$ **soluciones:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$; si $\Delta > 0$ 2 soluciones reales distintas
 $\Delta = 0$ 1 solución real (doble)
 $\Delta < 0$ 2 soluciones complejas (conjugadas)

fórmula simplificada si b es par: $x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$

suma y producto de soluciones: $\left. \begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = -b/a \\ P &= x_1 \cdot x_2 = c/a \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

Funciones polinómicas

- Función constante** (grado cero): $F(x) = k$
gráfica: recta paralela eje x , por el punto $(0, k)$.
- Función lineal** (grado uno): $F(x) = ax + b$
gráfica: recta que pasa por $(0, b)$ y de pendiente a .
- Función cuadrática** (grado dos): $F(x) = ax^2 + bx + c$
gráfica: parábola de vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Polinomios

Definición: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Grado: mayor exponente de las x

DIVISION:
$$\frac{D(x)}{R(x)} \quad \left| \begin{array}{l} d(x) \\ c(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x) \\ \text{grad } R(x) < \text{grad } d(x) \end{array} \right.$$

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D(x) \text{ es divisible por } d(x) \\ D(x) \text{ es múltiplo de } d(x) \\ d(x) \text{ es un divisor de } D(x) \end{array} \right.$$

Raíz o cero de $P(x)$: a es una raíz si $P(a) = 0$.

Raíces enteras: siempre son divisores del término a_0 .

TEOREMA DEL RESTO: El resto de dividir $P(x)$ por $(x - a)$ es $P(a)$.

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R \Rightarrow P(a) = R$$

consecuencia: si $P(a) = 0$ entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Regla de Ruffini:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_1	a_0	← Dividendo
		+	+		+	+	
Divisor $(x - a) \rightarrow a$	$a \cdot a_n$	$a \cdot a_{n-1}$		$a \cdot a_2$	$a \cdot a_1$	$a \cdot a_0$	
	$a_n = b_n$	b_{n-1}	b_{n-2}		b_1	b_0	
	Cociente					Resto	

Factorización de $P(x)$: $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$
con x_i raíces de $P(x)$.

Combinatoria

	Los elementos se repiten	Grupos ordenados	Identificación	Número de grupos
Variaciones	No ($n < m$)	Sí	$V_{m,n}$	$\frac{m!}{(m-n)!}$
Permutaciones	No ($n = m$)	Sí	P_m	$m!$
Combinaciones	No ($n \leq m$)	No	$C_{m,n} = \binom{m}{n}$	$\frac{m!}{n! (m-n)!}$
Variaciones con repetición	Pueden	Sí	$VR_{m,n}$	m^n
Permutaciones con repetición	Sí	Sí	$PR_{p,q,r,\dots}$	$\frac{(p+q+r)!}{p! q! r!}$

TRIANGULO DE TARTAGLIA:

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

Propiedades:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

FORMULA DE NEWTON. Potencia de un binomio

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

Para $(x - a)^n$, los términos correspondientes a potencias impares de a , son negativos. | Término general: $\binom{n}{k} x^k \cdot a^{n-k}$

Fórmulas notables:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2xa + a^2$$

$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3x^2a + 3xa^2 \pm a^3$$

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Aplicaciones

Definición: $f: A \rightarrow B$ es una aplicación si a todo elemento $a \in A$,
 $a \mapsto f(a) = b$ le corresponde un único $b \in B$.

a = original o antiimagen; b = imagen; A = dominio; $f(A)$ = recorrido

Inyectiva: si $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ (elementos distintos tienen imágenes distintas)

Exhaustiva: todo $b \in B$ tiene por lo menos una antiimagen. ($f(A) = B$)

Biyectiva: inyectiva + exhaustiva

Número de aplicaciones entre A y B :

n = n.º elementos de A

m = n.º elementos de B

Inyectivas	Exhaustivas	Biyectivas	Cualesquiera
$V_{m,n}$	$PR_{p,q,r}$ ($p + q + r = n$)	P_m ($m = n$)	$VR_{m,n}$

Estructuras algebraicas

Sea C un conjunto y $+$, $\cdot$ dos operaciones en C .

Grupo: $(C, +)$ si la operación cumple asociativa, neutro y simétrico.

Grupo abeliano: Grupo + conmutativa.

Cuerpo: $(C, +, \cdot)$ si $\left\{ \begin{array}{l} (C, +) \text{ grupo abeliano} \\ (C - \{0\}, \cdot) \text{ grupo} \\ e \cdot \cdot \text{ es distributivo respecto la } + \end{array} \right.$

Anillo: $(C, +, \cdot)$ si $\left\{ \begin{array}{l} (C, +) \text{ grupo abeliano} \\ e \cdot \cdot \text{ es asociativo} \\ e \cdot \cdot \text{ es distributivo respecto la } + \end{array} \right.$

Espacio vectorial sobre R :

$(E, +, *)$ si $\left\{ \begin{array}{l} (E, +) \text{ grupo abeliano} \\ (\alpha + \beta) * \vec{v} = (\alpha * \vec{v}) + (\beta * \vec{v}) \\ \alpha * (\vec{v} + \vec{t}) = (\alpha * \vec{v}) + (\alpha * \vec{t}) \\ \alpha * (\beta * \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) * \vec{v} \\ 1 * \vec{v} = \vec{v} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{v}, \vec{t} \in E \\ \alpha, \beta \in R \\ * \text{ operación externa} \end{array}$

Probabilidad

Definición: conjunto de resultados $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \quad \text{con} \quad \sum p(x_i) = 1$$

Suceso: es un $T \subset \Omega$. $p(T) = \sum p(x_i)$ para los $x_i \in T$.

Propiedades: $p(\Omega) = 1$
 $p(\emptyset) = 0$
 $p(T \cup S) = p(T) + p(S)$ cuando $T \cap S = \emptyset$ (incompatibles)

Suceso contrario: $\bar{T} = \Omega - T$; $p(\bar{T}) = 1 - p(T)$

Regla de Laplace: $p(T) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ si los resultados son equiprobables.

Regla de la suma: $p(T \cup S) = p(T) + p(S) - p(T \cap S)$

Sucesos independientes: $p(T \cap S) = p(T) \cdot p(S)$

Probabilidad condicionada: $p(T/S) = \frac{p(T \cap S)}{p(S)}$

Teorema de Bayes: $p(S_i/T) = \frac{p(S_i) \cdot p(T/S_i)}{p(S_1) \cdot p(T/S_1) + \dots + p(S_n) \cdot p(T/S_n)}$

Progresiones

ARITMETICA:	término general	$a_n = d \cdot n + b$	(d = diferencia)
	propiedad	$a_n = a_k + d \cdot (n - k)$	
	suma de n términos	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	
	si n es impar	$S_n = a_c \cdot n$	(a_c = término central)

GEOMETRICA:	término general	$a_n = a \cdot r^n$	(r = razón)
	casos	$r > 1$ creciente $0 < r < 1$ decreciente $r < 0$ alternada	
	propiedad	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$	
	suma de n términos	$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r} = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$	
	suma decreciente	$S = \frac{a_1}{1 - r}$	
	producto de n términos	$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$	
	si n es impar	$P_n = (a_c)^n$	(a_c = término central)

Interés simple:	$C_n = C \cdot (1 + n \cdot r)$	con	C_n = capital final
Interés compuesto:	$C_n = C \cdot (1 + r)^n$		C = capital inicial
			r = interés (tanto por uno)

Anualidades:	Capitalización	Amortización
	$a = \frac{C \cdot r}{(1 + r) [(1 + r)^n - 1]}$	$a = \frac{D \cdot r \cdot (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$

Sucesiones

Definición: $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con $S(n) = a_n$ término general.

Creciente: si $a_i \leq a_{i+1}$ **Decreciente:** si $a_i \geq a_{i+1}$

Monótona: si es creciente o decreciente.

Acotada $\left\{ \begin{array}{l} \text{superiormente: si } a_i \leq M, \forall i \text{ (M = cota superior)} \\ \text{inferiormente: si } m \leq a_i, \forall i \text{ (m = cota inferior)} \end{array} \right.$

LÍMITE: $L \in \mathbb{R}$ es el límite de $\{a_n\}$ si dado $\varepsilon > 0$ existe un cierto a_p de la sucesión, tal que todos los términos posteriores, a_q (con $q > p$) cumplan $|a_q - L| < \varepsilon$.
Se indica por $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = L$.

Convergente: si tiene límite: entonces: L es único y $\{a_n\}$ es acotada.

Propiedad: si $\{a_n\}$ es acotada y monótona $\Rightarrow \{a_n\}$ es convergente.

Clasificación: *Convergente:* acotada con límite

Oscilantes: acotada sin límite

Divergentes: no acotada ($\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \pm \infty$)

Límites indeterminados: $\frac{0}{0}$; $\infty - \infty$; $\frac{0}{\infty}$; 1^∞

Número e: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718281...$ siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Geometría del plano

VECTORES DEL PLANO:

Definición: $\vec{v} = (v_1, v_2)$, con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

Representación: el vector $\vec{v}$ puede representarse por cualquier par de puntos del plano, A = (a₁, a₂) origen y B = (b₁, b₂) extremo, que cumplan:

$$b_1 - a_1 = v_1; \quad b_2 - a_2 = v_2$$

Operaciones: suma, $(v_1, v_2) + (t_1, t_2) = (v_1 + t_1, v_2 + t_2)$
producto por un número, $h \cdot (v_1, v_2) = (hv_1, hv_2)$

Vectores paralelos: cuando sus componentes son proporcionales

$$\vec{v} // \vec{t} \Leftrightarrow v_1 \cdot t_2 = v_2 \cdot t_1 \Leftrightarrow \vec{v} = h \cdot \vec{t}$$

Combinación lineal: $\vec{s}$ es c.l. de $\vec{v}$ y $\vec{t}$ si $\vec{s} = h \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{t}$; $h, k \in \mathbb{R}$.

Base de vectores: $\vec{v}$ y $\vec{t}$ forman una base, si cualquier vector del plano se puede expresar como c.l. de ellos. En el plano, es suficiente que $\vec{v}$ y $\vec{t}$ no sean paralelos.

ECUACIONES DE UNA RECTA:

1. *Vectorial*: $(x, y) = (p_1, p_2) + h \cdot (v_1, v_2)$

2. *Paramétrica*: $\begin{cases} x = p_1 + h \cdot v_1 \\ y = p_2 + h \cdot v_2 \end{cases}$

3. *Cartesiana (Continua)*: $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$

4. *Punto-pendiente*: $y - p_2 = m \cdot (x - p_1)$

5. *Dados 2 puntos*: $\frac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x - p_1}{q_1 - p_1}$

6. *Segmentaria*: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

7. *Implícita*: $Ax + By + C = 0$

8. *Explícita*: $y = mx + b$

9. *Recta paralela al eje OX*: $y = b$
Recta paralela al eje OY: $x = a$

$P = (p_1, p_2)$ punto de posición

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ vector director

$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$ pendiente

$O = (q_1, q_2)$ punto de paso

$\begin{cases} (a, 0) \text{ punto corte eje OX} \\ (0, b) \text{ punto corte eje OY} \end{cases}$

$\vec{v} = (-B, A)$ vector director

$m = -\frac{A}{B}$ pendiente

por el punto $M(a, b)$

PENDIENTE DE UNA RECTA

Mide la inclinación de la recta. Es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal en su sentido positivo.

Si $m = 0$, recta paralela al eje horizontal

$m = 1$, recta paralela a la bisectriz del 1.º cuadrante (inclinación = 45°)

$m = -1$, recta paralela a la bisectriz del 4.º cuadrante (inclinación = -45°)

POSICION RELATIVA DE 2 RECTAS:

Dadas dos rectas: $Ax + By + C = 0$; $A'x + B'y + C' = 0$

$\begin{cases} \text{paralelas: } \vec{v} // \vec{v}' \Leftrightarrow m = m' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \begin{cases} = \frac{C}{C'} & \text{coincidentes} \\ \neq \frac{C}{C'} & \text{no coincidentes} \end{cases} \\ \text{se cortan en un punto: } m \neq m' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \end{cases}$

PRODUCTO ESCALAR, NORMA Y ANGULOS DE VECTORES:

Producto escalar de $\vec{v}$ y $\vec{t}$ es el número: $\vec{v} \cdot \vec{t} = v_1 t_1 + v_2 t_2$

Norma o módulo de $\vec{v}$ es el número: $\|\vec{v}\| = +\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Vectores ortogonales: si su producto escalar es cero.

Vector unitario: si su norma es 1. $\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ es unitario}\right)$.

Base ortogonal: si los vectores de la base son ortogonales

Base ortonormal: si los vectores de la base son ortogonales y unitarios

Angulo de 2 vectores: $\cos(\vec{v}, \vec{t}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{t}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{t}\|} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{t} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{t}\| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{t})$

Argumento de un vector: es el ángulo α tal que $\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|}$; $\sin \alpha = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$

Proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{t}$: $p_v = \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{t})$

DISTANCIAS, ANGULOS Y PERPENDICULARIDAD DE RECTAS:

Distancia: a) entre dos puntos $d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

b) entre punto y recta $d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

c) entre dos rectas $\begin{cases} \text{no paralelas} & d(r, r') = 0 \\ \text{paralelas} & d(r, r') = d(P, r') : P \in r \end{cases}$

Angulo de dos rectas: r) $Ax + By + C = 0$ y s) $A'x + B'y + C' = 0$

$\cos \alpha = \frac{A \cdot A' + B \cdot B'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}}$; $\tan \alpha = \frac{A \cdot B' - A'B}{A' + m \cdot B}$ (m, m' pendientes)

Rectas perpendiculares:

$A \cdot A' + B \cdot B' = 0 \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$

Recta perpendicular por un punto: $B(x - p_1) - A \cdot (y - p_2) = 0$

Funciones reales

Definición: es una aplicación $f: A \rightarrow B$, donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Domínio: conjunto A

Recorrido: conjunto de imágenes, $f(A)$

Operaciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad (f \text{ compuesta con } g)$$

Función recíproca: si $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, se define la recíproca

$$f^{-1}: B \rightarrow A \quad \text{como} \quad f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

Propiedad: $(f \circ f^{-1}) = (f^{-1} \circ f) = I$ ($I(x) = x$, función *identidad*)

LÍMITE: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon \geq 0$, existe un $\delta > 0$, de manera que si

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límites finitos y operaciones: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + m$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l}{m} \quad (\text{si } m \neq 0)$$

Límites infinitos y operaciones:

$[+\infty) + [+\infty) = +\infty$	$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$	$\frac{k}{0} = \pm\infty$
$[-\infty) + [-\infty) = -\infty$	$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$	$\frac{k}{\pm\infty} = 0$
$k + [+\infty) = +\infty$	$k \cdot [+\infty) = \pm\infty \quad (k \neq 0)$	$\frac{+\infty}{k} = \pm\infty$

Indeterminaciones: $(+\infty) - (+\infty)$; $0 \cdot \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

Límites cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot x^n + \dots + a_1}{b_m \cdot x^m + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

Propiedades del límite:

a) El límite, si existe es único.

$$b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

FUNCION CONTINUA: $f(x)$ continua en a , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Continuidad y operaciones:

Si f y g son continuas en a , también lo son: $k \cdot f$; $f + g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$).

Si f es continua en a , y g es continua en $f(a)$, entonces $(g \circ f)$ es continua en a .

Tipos de discontinuidad:

a) *evitable*: cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, pero $f(a) \neq L$ o $f(a)$ no definido.

b) *de salto*: existen límites laterales finitos pero son distintos.

c) *asintótica*: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

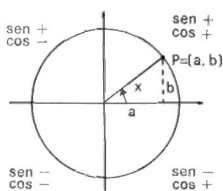
CRECIMIENTO / DECRECIMIENTO:

$f(x)$ es creciente en a , si en un entorno de a , se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

$f(x)$ es decreciente en a , si en un entorno de a , cumple

$$\left. \begin{array}{l} x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$



	Definición	Recorrido	Período	Discontinuid.
sen (x)	b	$[-1, +1]$	2π	—
cos (x)	a	$[-1, +1]$	2π	—
tg (x)	b/a	R	π	$\frac{\pi}{2} + k\pi$

Propiedad fundamental: $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$;

Relaciones:	complementarios	$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \text{cos } x$;	$\text{cos} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \text{sen } x$
	suplementarios	$\text{sen} (\pi - x) = \text{sen } x$;	$\text{cos} (\pi - x) = -\text{cos } x$
	difieren en π	$\text{sen} (\pi + x) = -\text{sen } x$;	$\text{cos} (\pi + x) = -\text{cos } x$
	difieren en $\pi/2$	$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \text{cos } x$;	$\text{cos} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\text{sen } x$
	opuestos	$\text{sen} (-x) = -\text{sen } x$;	$\text{cos} (-x) = \text{cos } x$

Conversión de ángulos: $180^\circ = \pi$ radianes

$$\text{radianes} = \frac{\text{grados} \times \pi}{180} ; \quad \text{grados} = \frac{\text{radianes} \times 180}{\pi}$$

Valores trigonométricos usuales:

grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

FUNCIONES RECIPROCAS:

Arco seno: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; DEF. $\text{arc sen } (a) = b \Leftrightarrow \text{sen } b = a$

Arco coseno: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$; DEF. $\text{arc cos } (a) = b \Leftrightarrow \text{cos } b = a$

Arco tangente: $\mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; DEF. $\text{arc tg } (a) = b \Leftrightarrow \text{tg } b = a$

FUNCIONES INVERSAS:

$$\text{cosec } (x) = \frac{1}{\text{sen } x} ; \quad \text{sec } (x) = \frac{1}{\text{cos } x} ; \quad \text{cotg } (x) = \frac{1}{\text{tg } x}$$

FORMULAS TRIGONOMETRICAS:

Adición: $\text{sen } (\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta$; $\text{tg } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$
 $\text{cos } (\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$;

Angulo doble: $\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha$; **Angulo mitad:** $\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{2}}$
 $\text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$; $\text{cos } \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos } \alpha}{2}}$
 $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

Transformaciones: $\text{sen } \alpha \pm \text{sen } \beta = 2 \cdot \text{sen } \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha \mp \beta}{2}$
 $\text{cos } \alpha + \text{cos } \beta = 2 \cdot \text{cos } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos } \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\text{cos } \alpha - \text{cos } \beta = -2 \cdot \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta = \frac{\text{sen } (\alpha \pm \beta)}{\text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta}$

Exponenciales (fig. 10)

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad \exp_a(x) = a^x$$

$$\text{si } a > 1$$

$$\text{si } 0 < a < 1$$

$$\exp_a(0) = a^0 = 1$$

$$\exp_a(x + x') = \exp_a(x) \cdot \exp_a(x')$$

$$\exp_a(x - x') = \exp_a(x) : \exp_a(x')$$

$$\exp_a(kx) = [\exp_a(x)]^k$$

En ambos casos la base es
 $a \in \mathbb{R}^+; \quad a \neq 1$

$$\text{Si } a = 10 \quad \exp_{10}(x) = 10^x$$

$$\text{Si } a = e \quad \exp_e(x) = e^x$$

Logarítmicas (fig. 11)

$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; \quad \log_a(x) = b \Leftrightarrow a^b = x$$

crecientes

decrecientes

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(x \cdot x') = \log_a(x) + \log_a(x')$$

$$\log_a\left(\frac{x}{x'}\right) = \log_a(x) - \log_a(x')$$

$$\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$$

Cambio de base:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \cdot \log_b(x)$$

$$\text{L. Decimal: } \log_{10}(x) = \log(x)$$

$$\text{L. Neperiano: } \log_e(x) = \ln(x)$$

FUNCIONES HIPERBOLICAS

Seno hiperbólico:

$$\text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{fig. 13})$$

Coseno hiperbólico:

$$\text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{fig. 14})$$

Tangente hiperbólica:

$$\text{Th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{fig. 15})$$

Caracterización: $\begin{cases} x = \text{Ch}t \\ y = \text{Sh}t \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas de la hipérbola

Argumento Shx:

$$\text{Arg Sh}x = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Argumento Chx:

$$\text{Arg Ch}x = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Argumento Thx:

$$\text{Arg Th}x = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+x}{1-x}$$

Derivadas

Función derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ecuación recta tangente a una curva:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ecuación recta normal:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

Reglas de derivación:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Derivada logarítmica:

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$$

TABLA DE DERIVADAS:

$f(x) = u^n$; $f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$f(x) = \cos u$; $f'(x) = -\sin u \cdot u'$
$f(x) = k$; $f'(x) = 0$	$f(x) = \text{tg } u$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$f(x) = \sqrt[n]{u}$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[n]{u}} \cdot u'$	$f(x) = \cot u$; $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$f(x) = \sqrt[n]{u}$; $f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$	$f(x) = \text{arc sen } u$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(x) = a^u$; $f'(x) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$f(x) = \text{arc cos } u$; $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(x) = e^u$; $f'(x) = e^u \cdot u'$	$f(x) = \text{arc tg } u$; $f'(x) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$f(x) = \ln u$; $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$	$f(x) = \text{arc cot } u$; $f'(x) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$
$f(x) = \log_a u$; $f'(x) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	$f(x) = \sec u$; $f'(x) = \frac{\sec u}{\cos^2 u} \cdot u'$
$f(x) = \text{sen } u$; $f'(x) = \cos u \cdot u'$	$f(x) = \text{cosec } u$; $f'(x) = \frac{-\cos u}{\sin^2 u} \cdot u'$

Teorema del V. Medio:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{para } a < c < b$$

Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Fórmula de Taylor: (para $a = 0$, Fórmula de Maclaurin)

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_{n+1}(x)$$

Desarrollos de algunas funciones elementales:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \dots$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Estudio de funciones

Simetrías: función par: $f(-x) = f(x)$, simetría respecto eje OY.
función impar: $f(-x) = -f(x)$, simetría respecto origen.

Crecimiento y extremos relativos:

Caso simple

$f'(a) > 0$	Crece ↗	
$f'(a) < 0$	Decrece ↘	
$f'(a) = 0$	$f''(a) < 0$	Máximo
	$f''(a) > 0$	Mínimo

Caso general

Si $f^{(n)}(a) \neq 0$ y todas las derivadas anteriores son cero	n impar	$f^{(n)}(a) > 0$	Crece ↗
		$f^{(n)}(a) < 0$	Decrece ↘
	n par	$f^{(n)}(a) < 0$	Máximo
		$f^{(n)}(a) > 0$	Mínimo

Concavidad e Inflexión:

Caso simple

$f''(a) > 0$	Cóncava U	
$f''(a) < 0$	Convexa ∩	
$f''(a) = 0$	$f'''(a) \neq 0$	Inflexión

Caso general

Si $f^{(n)}(a) \neq 0$ y para $1 < k < n$ es $f^{(k)}(a) = 0$	n par	$f^{(n)}(a) > 0$	Cóncava U
		$f^{(n)}(a) < 0$	Convexa ∩
	n impar	$f^{(n)}(a) \neq 0$	Inflexión

Asintotas:

vertical $x = a$ cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

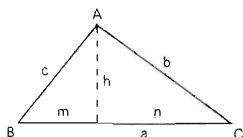
horizontal $y = b$ cuando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

oblicua $y = mx + b$ cuando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = b$

Resolución de triángulos

TRIANGULOS RECTANGULOS:

$$\hat{A} = 90^\circ; \quad \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$



Razones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{B} &= \frac{b}{a}; & \operatorname{sen} \hat{C} &= \frac{c}{a} \\ \cos \hat{B} &= \frac{c}{a}; & \cos \hat{C} &= \frac{b}{a} \\ \operatorname{tg} \hat{B} &= \frac{b}{c}; & \operatorname{tg} \hat{C} &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema de la altura:

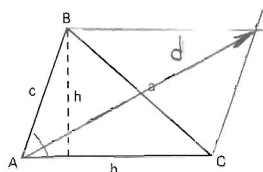
$$h^2 = m \cdot n$$

Teorema del cateto:

$$c^2 = a \cdot m; \quad b^2 = a \cdot n$$

TRIANGULOS CUALESQUIERA:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



Teorema de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$

Teorema del coseno:
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned}$$

Fórmulas del área: $S = \frac{1}{2} b \cdot h; \quad S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \operatorname{sen} C$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad \text{siendo} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Mediana: recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
Baricentro: punto de intersección de las 3 medianas de un triángulo.

Altura: recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.
Ortocentro: punto de intersección de las 3 alturas de un triángulo.

Mediatriz: recta perpendicular a un lado y que pasa por su punto medio.
Circuncentro: punto de intersección de las 3 mediatrices de un triángulo.
 Es el centro de la circunferencia circunscrita.

Bisectriz: recta que pasa por un vértice y divide el ángulo en dos partes iguales.
 Sus puntos equidistan de los 2 lados.

Incentro: punto de intersección de las 3 bisectrices interiores de un triángulo.
 Es el centro de la circunferencia inscrita.

Otras relaciones:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}; \quad \begin{cases} a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \\ b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A \\ c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A \end{cases}$$

Números complejos

Forma binómica: $Z = a + bi$; con $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$

operaciones:
$$\begin{aligned} (a+bi) + (c+di) &= (a+c) + (b+d)i \\ (a+bi) \cdot (c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\ \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

conjugado: $\bar{Z} = a - bi$

Potencias: $i^{0+4n} = 1; \quad i^{1+4n} = i; \quad i^{2+4n} = -1; \quad i^{3+4n} = -i$

Forma polar: $Z = r_\alpha$ con **módulo:** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ **argumento:** $\alpha + 2k\pi$ tal que $\begin{cases} \cos \alpha = a/r \\ \operatorname{sen} \alpha = b/r \end{cases}$

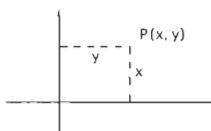
operaciones:
$$\begin{aligned} Z \cdot Z' &= (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'}; & \frac{Z}{Z'} &= \left(\frac{r}{r'} \right)_{\alpha-\alpha'} \\ Z^n &= (r^n)_{n \cdot \alpha}; & \sqrt[n]{Z} &= (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \text{ con } k=0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Forma trigonométrica: $Z = r \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

Fórmula de De Moivre: $(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$

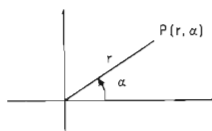
Sistemas de coordenadas

Plano:



cartesianas

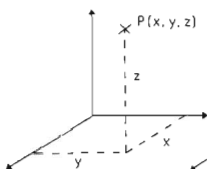
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \sin \alpha \end{cases}$$



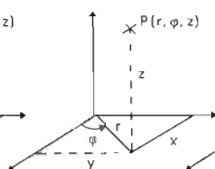
polares

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \arctg y/x \end{cases}$$

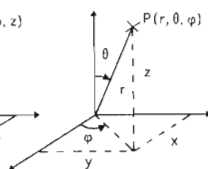
Espacio:



(1) cartesianas



(2) cilíndricas



(3) esféricas

Cambio de coordenadas:

(1) ↔ (2)

$x = r \cdot \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \cdot \sin \varphi$	$\varphi = \arctg y/x$
$z = z$	$z = z$

(1) ↔ (3)

$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$	$\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$
$z = r \cdot \cos \theta$	$\varphi = \arctg y/x$

Cónicas (figs. 16 a 18)

Circunferencia: lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{centro } (a, b); \quad \text{radio } r$$

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad \text{centro } \left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2} \right); \quad \text{radio } \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$$

Elipse: lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = \text{semieje mayor} \\ b = \text{semieje menor} \\ c = \text{semidistancia focal} \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{excentricidad} \quad (e < 1); \quad b^2 = a^2 - c^2$$

Hiperbola: lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c = \text{semidistancia focal}$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{excentricidad} \quad (e > 1); \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Parábola: lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

$$y^2 = 2px \quad \text{con} \quad p = \text{distancia foco a directriz}$$

Ecuación focal de las cónicas:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \alpha} \quad \text{para} \quad \begin{cases} e < 1 & \text{elipse} \\ e = 1 & \text{parábola} \\ e > 1 & \text{hipérbola} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} e = c/a \\ p = b^2/a \end{cases}$$

PARAMETROS ESTADÍSTICOS:

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{f_i}{N}$$

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N}$$

Moda = el dato de mayor frecuencia

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N}$$

Desviación típica = σ

con $\left\{ \begin{array}{l} f_i = \text{frecuencia absoluta de } x_i \\ x_i = \text{dato } i \\ N = \text{total de observaciones} \end{array} \right.$

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES:

$$\text{Covarianza } \sigma_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{N} = \frac{1}{N} \sum x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Coeficiente de correlación lineal: $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

interpretación de r

$r = 0$	correlación nula
$r > 0$	correlación directa
$r < 0$	correlación inversa
$r = \pm 1$	dependencia funcional

Regresión lineal:

recta de regresión de Y sobre X: $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$

recta de regresión de X sobre Y: $x - \bar{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} (y - \bar{y})$

VARIABLE ALEATORIA:

Es cualquier aplicación de Ω en $\mathbb{R}$: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

V. a. discreta: cuando $X(\Omega)$ es finito.

V. a. continua: cuando $X(\Omega) = [a, b]$.

Variable aleatoria discreta:

función de probabilidad: $p(x_i) = P\{X^{-1}(x_i)\}$ para cada $x_i \in X(\Omega)$

función de distribución: $F(x_i) = \sum_{x_j \leq x_i} p(x_j)$

esperanza matemática: $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$

varianza: $\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2$

desviación típica: σ_x

Distribución binomial: $B(n, p)$

$$p(x_i) = \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot q^{n-x_i} \quad ; \quad \mu = E(X) = n \cdot p \quad ; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

n = número de repeticiones; p = prob. éxito; $q = 1 - p$ = prob. fracaso

Variable aleatoria continua:

función de distribución: $F(x) = P(X \leq x) = P\{X^{-1}([a, x])\}$

función de densidad: $f(x) = F'(x)$

por tanto $P(c < x \leq d) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(t) dt$

esperanza matemática: $\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$

varianza: $\sigma_x^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$

Distribución normal: $N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

normal tipificada: $N(0, 1)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (fig. 12)

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

tipificación de una v. a. normal: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Primitiva: $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, si: $F'(x) = f(x)$.

Si $F(x)$ es una primitiva, también lo es $G(x) = F(x) + k$.

El conjunto de primitivas de $f(x)$ se indica por $\int f(x) dx = F(x) + k$

Propiedades: $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
 $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

TABLA DE INTEGRALES: siendo $u = f(x)$

$\int u' \cdot dx = u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int k \cdot u' \cdot dx = ku + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' \cdot dx = -\cot u + C$
$\int u^n \cdot u' \cdot dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arctg} u + C$
$\int \frac{1}{u} \cdot u' \cdot dx = \ln u + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + C$
$\int e^u \cdot u' \cdot dx = e^u + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen} u} \cdot u' \cdot dx = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$
$\int a^u \cdot u' \cdot dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\cos u} \cdot u' \cdot dx = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
$\int \operatorname{sen} u \cdot u' \cdot dx = -\cos u + C$	$\int \frac{1}{a^2 - u^2} \cdot u' \cdot dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + C$
$\int \cos u \cdot u' \cdot dx = \operatorname{sen} u + C$	$\int \operatorname{tg} u \cdot u' \cdot dx = -\ln \cos u + C$

MÉTODOS DE INTEGRACION:

- Cambio de variable:** $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$ con $x = g(t)$
- Integración por partes:** $\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx$
- Integración de funciones racionales:** $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$
 - si grado $P \geq$ grado Q : $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ y ver 3.b)
 - si grado $P <$ grado Q : descomponer $\frac{P}{Q}$ en fracciones simples.

casos más comunes:

$$\int \frac{b}{x-a} dx = b \cdot \ln |x-a| + C$$

$$\int \frac{b}{(x-a)^n} dx = b \cdot \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \frac{M}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2aN-bM}{a \cdot \sqrt{4ac-b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$$

- Integración de funciones racionales trigonométricas:**

con el cambio $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t$;

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} ; \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

y queda una función racional de variable t .

INTEGRAL DEFINIDA:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{área comprendida entre } y = f(x) ; \text{ eje } OX ; x = a ; x = b$$

Regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{con } F(x) \text{ primitiva de } f(x).$$

Propiedades:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{con } a < c < b ; \quad \int_a^b f = - \int_b^a f$$

$$\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g \quad \int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$$

Cambio de variable:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot dt \quad \text{con} \quad \alpha = g^{-1}(a); \quad \beta = g^{-1}(b)$$

Area comprendida entre:

$$y = f(x); \quad y = g(x); \quad x = a; \quad x = b$$

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

Volumen de revolución:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Longitud de un arco de curva:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Espacios vectoriales

SUBESPACIO VECTORIAL: Sea E un esp. vector y $V \subset E$. Diremos que V es un subesp. vect. de E si:

$$(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \in V, \quad \text{para} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Independencia lineal: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes (l.i.) si:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Generadores: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son generadores de V , si $\forall \vec{v} \in V$ es

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n. \quad (\vec{v} \text{ es combinación lineal de } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

Base: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son una base de V si son l.i. y generadores.

En este caso $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ son las componentes de $\vec{v}$ en esta base.

Dimensión de un subespacio: es el número de vectores de una base.

Base canónica de $\mathbb{R}^n$: $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0); \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \quad \dots; \quad \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$

APLICACIONES LINEALES: $f: E \rightarrow F; \quad E, F$ esp. vector.

$$f \text{ lineal si } f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

$$\text{Núcleo: } \text{Ker } f = \{\vec{v} \in E / f(\vec{v}) = 0\}$$

$$\text{Imagen: } \text{Im } f = f(E) = \{\vec{v} \in F / \exists \vec{u} \in E \text{ con } f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

Rango: es la dimensión de $\text{Im } f$.

$$\text{Propiedad: } \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(E)$$

Matrices y determinantes

Matriz: cuadro de números ordenados por filas y columnas.

$A_{n \times m}$ = matriz A , de n filas y m columnas.

a_{ij} = elemento de $A_{n \times m}$ que ocupa la fila i , columna j .

Suma: $A_{n \times m} + B_{n \times m} = C_{n \times m}$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Producto: $A_{n \times m} \cdot B_{m \times p} = C_{n \times p}$ con $c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk}$.

- **Matriz de una aplicación lineal:** la que tiene por columna j , las componentes del vector $f(\vec{e}_j)$.

Determinante de una matriz cuadrada:

$$\text{orden 2: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\text{orden 3: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

(Regla de Sarrus)

$$\text{general: } \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} A_{ij}$$

con A_{ij} = determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j .

$[(-1)^{i+j} A_{ij}]$ se llama **adjunto** de a_{ij} .

Menores de orden p de una matriz: son los determinantes de las matrices cuadradas que se obtienen al suprimir $(m-p)$ filas y $(m-p)$ columnas.

Matriz traspuesta, A^t : la que se obtiene al cambiar filas por columnas.

Matriz adjunta, A^* : la que se obtiene sustituyendo cada elemento por su adjunto.

Matriz identidad, I : $\begin{vmatrix} a_{ij} = 1 & \text{si } i=j \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{vmatrix}$

Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^t$, cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Rango de una matriz: es el orden del mayor menor no nulo. Coincide con el máximo número de vectores columna linealmente independientes.

Sistemas de ecuaciones lineales

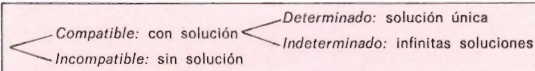
$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sistema de } m \text{ ecuaciones} \\ \text{con } n \text{ incógnitas} \end{array}$$

Matricialmente: $A \cdot X = B$
 con $A = (a_{ij})$; $X = (x_i)$; $B = (b_i)$ $i = 1, \dots, m$
 $j = 1, \dots, n$

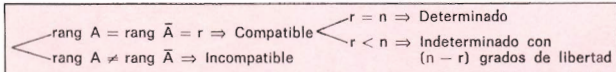
Matriz ampliada: $\bar{A} = [A : B]$

Sistema homogéneo: $b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$

CLASIFICACION DE SISTEMAS:



Teorema de Rouché-Frobenius:



Sistema de Cramer: sistema con n ecuaciones, n incógnitas y rango n .

Regla de Cramer:

$$x_i = \frac{\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{b}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n)}{\det A}$$

Geometría del espacio

Producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{o bien} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\text{con} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\text{o bien} \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ vectores de la base canónica.}$$

propiedades:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

Producto mixto:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cosenos directores:} \quad \cos \varphi_1 = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}; \quad \cos \varphi_3 = \frac{u_3}{\|\vec{u}\|}$$

$$\text{con} \quad \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$$

ECUACIONES DE UNA RECTA:

$$1. \text{ — Vectorial: } (x, y, z) = (a, b, c) + \lambda (u_1, u_2, u_3)$$

$$2. \text{ — Paramétricas: } \begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases}$$

$$3. \text{ — Continua: } \frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3}$$

$$4. \text{ — Como intersección de dos planos: } \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donde} \quad (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) = (u_1, u_2, u_3)$$

ECUACIONES DE UN PLANO:

$$1. \text{ — Vectorial: } (x, y, z) = (a, b, c) + \lambda (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3)$$

$$2. \text{ — Paramétricas: } \begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

$$3. \text{ — Implícita: } \begin{vmatrix} x-a & u_1 & v_1 \\ y-b & u_2 & v_2 \\ z-c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

con (A, B, C) perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO:

	Paralelos	Perpendiculares
Recta - recta	$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$	$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$
Recta - plano	$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$	$\frac{A}{u_1} = \frac{B}{u_2} = \frac{C}{u_3}$
Plano - plano	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

ANGULOS:

Recta - recta	Plano - plano	Recta - plano
$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$	$\cos \alpha = \frac{\vec{s} \cdot \vec{t}}{\ \vec{s}\ \ \vec{t}\ }$	$\sin \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{s}}{\ \vec{u}\ \ \vec{s}\ }$

con $\vec{u}, \vec{v}$ vectores directores de dos rectas
 $\vec{s}, \vec{t}$ vectores asociados a dos planos

POSICIONES RELATIVAS:

Dos rectas	Rectas dadas:	
	como intersección de 2 planos	en forma vectorial
Se cortan	$\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 3$	$\det(\vec{u}, \vec{u}', \vec{w}) = 0$ con $\vec{u}, \vec{u}'$ no paralelos
Se cruzan	$\text{rang } M \neq \text{rang } \overline{M}$	$\det(\vec{u}, \vec{u}', \vec{w}) \neq 0$
Paralelas	$\text{rang } M = 2 \neq \text{rang } \overline{M} = 3$	$\vec{u}, \vec{u}'$ paralelos
Coincidentes	$\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 2$	$\vec{u}, \vec{u}'$ y $\vec{w}$ paralelos

con $M = \text{matriz } 4 \times 3$

$\vec{w} = (a, b, c) - (a', b', c')$

$\overline{M} = \text{matriz } 4 \times 4$ (M ampliada)

Recta y plano	Plano en forma implícita y recta dada:	
	como intersección de 2 planos	en forma vectorial
Se cortan	$\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 3$	$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 \neq 0$
Paralelos	$\text{rang } M \neq \text{rang } \overline{M}$	$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$ y $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$
Recta contenida en el plano	$\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 2$	$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$ y $Aa + Bb + Cc + D = 0$

$M = \text{matriz } 3 \times 3$

$\overline{M} = \text{matriz ampliada } 3 \times 4$

Dos planos	Planos en forma implícita	
	por matrices	por vectores
Se cortan según una recta	$\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 2$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
Paralelos	$\text{rang } M \neq \text{rang } \overline{M}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
Coincidentes	$\text{rang } M = \text{rang } \overline{M} = 1$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

$M = \text{matriz } 2 \times 3$

$\overline{M} = \text{matriz ampliada } 2 \times 4$

DISTANCIAS:

Punto a punto: $d(P, P') = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2}$

Punto a recta: $d(P, r) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{PA}\|}{\|\vec{u}\|}$ $P = (a, b, c)$

$r: A + \lambda \vec{u}$

Recta a recta: $d(r, r') = \frac{|(\vec{u} \times \vec{u}') \cdot \vec{AA'}|}{\|\vec{u} \times \vec{u'}\|}$ $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

Punto a plano: $d(P, \pi) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Recta a plano y plano a plano, usar fórmula anterior.

AREAS Y VOLUMENES:

Area triángulo plano: $S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Area triángulo en el espacio: $S = \frac{1}{2} \|\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}\|$

Volumen tetraedro: $V = \frac{1}{6} |(\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}) \cdot \vec{P_1P_4}|$

Hacés:

Haz de rectas: $\frac{x-a}{\lambda u_1} = \frac{y-b}{\mu u_2} = \frac{z-c}{u_3}$; (a, b, c) pto. fijo

Haz de planos: $\lambda(Ax + By + Cz + D) + \lambda'(A'x + B'y + C'z + D') = 0$

Movimientos y semejanzas en el espacio

Movimiento: ecuación general $\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{t}$
con A matriz ortogonal ($A A^T = I$)

Homotecias: ecuación general $\vec{r}' = k\vec{r}$; $k =$ razón

Semejanzas: ecuación general $\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{t}$
con $A = kB$ y B matriz ortogonal
(composición de un movimiento y una homotecia).

ECUACIONES DE MOVIMIENTOS EN EL ESPACIO:

1) Traslación; vector $\vec{t}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

2) Giro; ángulo α y eje Z .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3) Simetría axial; el eje es una recta del plano XY , por el origen y con un ángulo α respecto al eje X .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4) Movimiento helicoidal; ángulo α , eje Z y traslación $(0, 0, t_3)$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

5) Simetría central; centro origen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

6) Simetría especular; plano que contiene al eje Z , ángulo α respecto eje X .

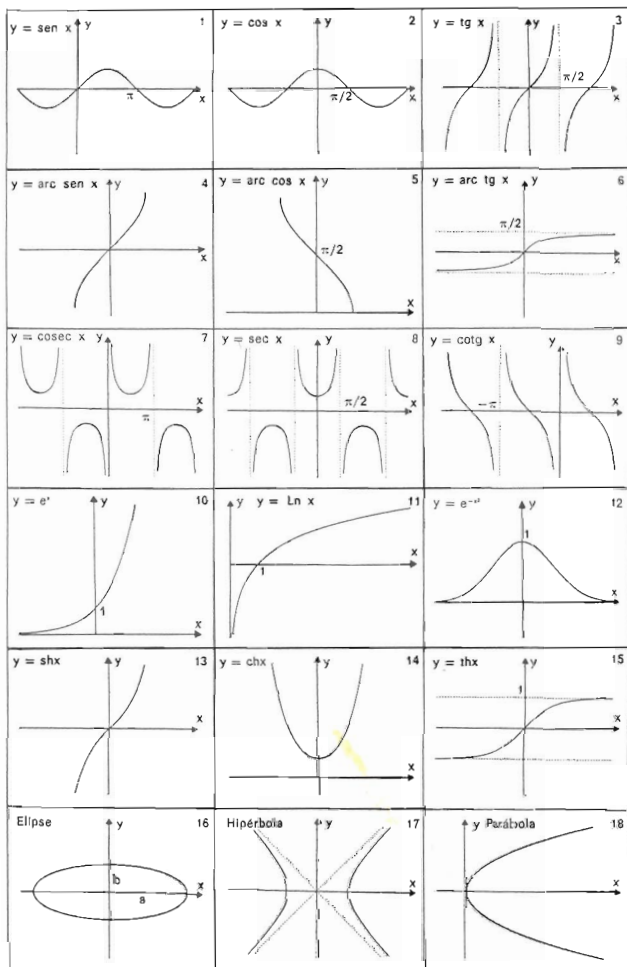
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7) Simetría rotatoria; plano XY , giro ángulo α y eje Z .

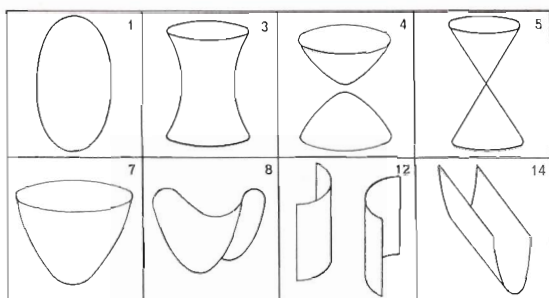
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8) Simetría con deslizamiento; plano XY , traslación vector $(t_1, t_2, 0)$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



NOTAS



1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ Elipsoide
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ Elipsoide imaginario
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ Hiperboloide de una hoja
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ Hiperboloide de dos hojas
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ Cono de segundo orden
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Cono de segundo orden imaginario
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$ Paraboloide elíptico
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$ Paraboloide hiperbólico
9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Cilindro elíptico
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ Cilindro elíptico imaginario
11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Par de planos imaginarios que se cortan
12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Cilindro hiperbólico
13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Par de planos que se cortan
14. $y^2 - 2px = 0$ Cilindro parabólico
15. $x^2 - a^2 = 0$ Par de planos paralelos
16. $x^2 + a^2 = 0$ Par de planos paralelos imaginarios
17. $x^2 = 0$ Par de planos coincidentes

Áreas y volúmenes	2
Conjuntos de números	3
Potencias / raíces	3
Ecuación de 2º grado	3
Funciones polinómicas	4
Polinomios	4
Combinatoria	4
<i>Triángulo de Tartaglia</i>	4
<i>Fórmula de Newton. Potencia de un binomio</i>	5
Aplicaciones	5
Estructuras algebraicas	5
Probabilidad	5
Progresiones	6
<i>Aritmética</i>	6
<i>Geométrica</i>	6
Sucesiones	6
<i>Límite</i>	6
Geometría del plano	6
<i>Vectores del plano</i>	6
<i>Ecuaciones de una recta</i>	7
<i>Posición relativa de 2 rectas</i>	7
<i>Producto escalar, norma y ángulos de vectores</i>	7
<i>Distancias. Ángulos y perpendicularidad de rectas</i>	7
Funciones reales	8
<i>Límite</i>	8
<i>Función continua</i>	8
<i>Crecimiento / Decrecimiento</i>	8
Funciones circulares	9
<i>Funciones recíprocas</i>	9
<i>Funciones inversas</i>	9
<i>Fórmulas trigonométricas</i>	9
Funciones exponenciales y logarítmicas	10
<i>Funciones hiperbólicas</i>	10
Derivadas	10
<i>Tabla de derivadas</i>	10
Estudio de funciones	11
Resolución de triángulos	12
<i>Triángulos rectángulos</i>	12
<i>Triángulos cualesquiera</i>	12
Números complejos	12
Sistemas de coordenadas	13
Cónicas	13
Estadística	14
<i>Parametros estadísticos</i>	14
<i>Distribuciones bidimensionales</i>	14
<i>Variable aleatoria</i>	14
Integración	15
<i>Tabla de integrales</i>	15
<i>Métodos de integración</i>	15
<i>Integral definida</i>	15
Espacios vectoriales	16
<i>Subespacio vectorial</i>	16
<i>Aplicaciones lineales</i>	16
Matrices y determinantes	16
Sistemas de ecuaciones lineales	17
<i>Clasificación de sistemas</i>	17
Geometría del espacio	17
<i>Ecuaciones de una recta</i>	17
<i>Ecuaciones de un plano</i>	17
<i>Perpendicularidad y paralelismo</i>	18
<i>Ángulos</i>	18
<i>Posiciones relativas</i>	18
<i>Distancias</i>	19
<i>Áreas y volúmenes</i>	19
Movimientos y semejanzas en el espacio	19
<i>Ecuaciones de movimientos en el espacio</i>	19
Gráficas	20
Cuádricas	21